

## КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 25.11.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. На клетчатой доске  $28 \times 28$  все 28 клеток диагонали, идущей из левого верхнего угла доски в правый нижний, покрашены в чёрный цвет. Хромая ладья за один ход переходит из клетки в соседнюю с ней по стороне. Хромая ладья обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно один раз (в частности, она не возвращалась в начальную клетку). Докажите, что в какой-то момент ладья сошла с чёрной клетки, а следующим ходом пришла на чёрную.

2. Даны натуральные числа  $b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_m$ , а также натуральное  $k > 2$ . Обозначим

$$P = \prod_{i=1}^n (b_i + k - 1) \prod_{j=1}^m (c_j + 1), \quad Q = \prod_{i=1}^n (b_i + k) \prod_{j=1}^m c_j, \quad R = \prod_{i=1}^n (b_i + 1) \prod_{j=1}^m (c_j + k - 1).$$

Докажите, что если  $P < Q$ , то  $P > R$ . Как обычно, через  $\prod_{s=1}^t a_s$  обозначается произведение  $a_1 a_2 \dots a_t$ .

3. В окружности, описанной около неравнобедренного остроугольного треугольника  $ABC$ , взят диаметр  $UV$ , проходящий через ортоцентр  $H$  этого треугольника. Пусть  $AD$  — высота этого треугольника, а  $S$  — ортоцентр треугольника  $DUV$ . Докажите, что середина отрезка  $AS$  лежит на прямой  $BC$ .

4. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$  — перестановка чисел  $1, 2, \dots, 2n + 1$ . Обязательно ли можно окрасить все числа  $1, 2, \dots, 2n + 1$  в красный и синий цвета так, чтобы при любом  $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$  числа  $i, i + 1, i + 2$  не были все красными, и числа  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}$  не были все синими? Числа и индексы берутся по модулю  $2n + 1$ .

5. Верно ли, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде  $\pm m^{17} \pm p$ , где  $m$  — натуральное число, а  $p$  — простое число?

6. Дан описанный четырёхугольник  $ABCD$ . Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , а прямые  $AD$  и  $BC$  — в точке  $F$ . Внешние биссектрисы углов  $A$  и  $C$  и прямая  $EF$  образуют треугольник  $\Delta_1$ . Внешние биссектрисы углов  $B$  и  $D$  и прямая  $EF$  образуют треугольник  $\Delta_2$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  касаются.

7. Для натуральных чисел  $s < t < n$  докажите, что

$$C_n^s \cdot C_n^t = C_{n+0}^{s+t} \cdot C_s^0 \cdot C_t^0 + C_{n+1}^{s+t} \cdot C_s^1 \cdot C_t^1 + \dots + C_{n+s}^{s+t} \cdot C_s^s \cdot C_t^s.$$

Как обычно, для целых неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  через  $C_a^b$  обозначается количество  $b$ -элементных подмножеств  $a$ -элементного множества. В частности, при  $a < b$  выполнено  $C_a^b = 0$ .

8. Найдите все пары приведённых многочленов  $P(x), Q(x)$  с комплексными коэффициентами такие, что  $P(x)^2 + 1$  делится на  $Q(x)$  и  $Q(x)^2 + 1$  делится на  $P(x)$ . Напомним, что многочлен называется *приведённым*, если его старший коэффициент равен 1.